Dossier n°13 : Exemples d'étude, au niveau collège, de problèmes conduisant à une équation ou une inéquation du premier degré.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 26 juillet 2003.
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

En classe de sixième, on initie les élèves aux écritures littérales ainsi qu'à la résolution d'équations dans des cas simples (une addition, une soustraction ou une multiplication).

Cette initiation à la résolution d'équations se poursuit en cinquième avec le cas d'une division et la vérification d'égalité comportant une ou deux inconnues en leur attribuant des valeurs données.

En classe de quatrième, les élèves apprennent le calcul littéral ainsi qu'à résoudre des problèmes conduisant à des équations du premier degré à une inconnue.

Enfin, en troisième, ils poursuivent le calcul littéral, découvrent la résolution d'inéquations du premier degré à une inconnue et apprennent à résoudre des problèmes du premier degré.

Je choisis donc de situer ce dosser en quatrième et en troisième.

II Commentaires généraux.

II.1 A propos du sujet.

L'objectif de ce dossier est de faire mettre en œuvre les techniques de résolution d'équations et d'inéquations du premier degré à une inconnue acquises par les élèves au collège, dans des situations concrètes.

On distingue deux grandes méthodes de résolution de tels problèmes :
- la résolution algébrique ;
- la résolution graphique.

En particulier, en troisième, les outils « fonctions linéaires » et « fonctions affines » permettent de justifier la deuxième méthode (notamment pour l'alignement des points).

II.2 A propos des exercices.

J'ai donc choisi, pour illustrer ce dossier, de vous présenter quatre exercices.

Le premier exercice conduit à la résolution d'une équation par la méthode algébrique. *A priori, on croit avoir à faire à la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues mais, en quatrième, on apprend à contourner ce problème.*

Le deuxième exercice conduit à la résolution d'une équation d'abord par la méthode graphique puis par la méthode algébrique.

Le troisième exercice conduit à la résolution d'une inéquation par la méthode algébrique.

Enfin, le quatrième exercice, de synthèse, conduit à la résolution d'équations et d'inéquations, d'abord graphiquement, puis algébriquement.

Dans tout problème du premier degré, il convient d'appliquer le schéma de résolution suivant :
- choix de l'inconnue ;
- mise en équation du problème ;
- résolution de l'équation ou de l'inéquation ;
- interprétation du résultat et conclusion.

C'est ce schéma de résolution qu'on appliquera dans les exercices proposés.

III Présentation des exercices.

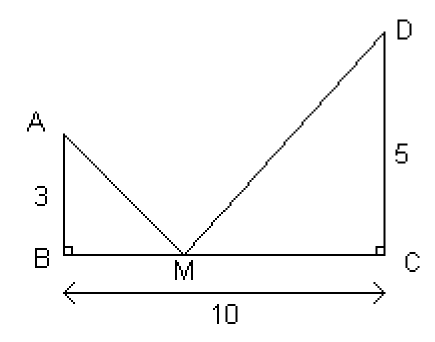
III.1 Exercice n°1.

__But :__ Déterminer le nombre de motos garées sur un parking parmi deux types de véhicules.

__Méthode :__ résolution algébrique.

On s'attachera à ne pas résoudre ce problème en faisant intervenir deux inconnues mais une seule.

III.2 Exercice n°2.



__But__ : Les points A, B, C et D étant fixés, déterminer pour quelle position du point M les triangles ABM et CDM ont même aire.

__Méthode :__

- On fera un tracé graphique pour « deviner » la position du point M demandée ;
- On fera une résolution algébrique pour déterminer la position exacte du point M.

III.3 Exercice n°3.

__But :__ Déterminer combien de temps doit durer une location pour être plus avantageuse qu'une autre.

__Méthode :__ résolution algébrique.

III.4 Exercice n°4.

__But :__ Comparer deux tarifs proposés par une entreprise.

__Méthode :__

- lectures graphiques ;
- résolution algébrique.

__Outils :__

Fonctions affines

Ce problème, tel qu'il était posé, ne proposait pas de résolution algébrique. La lecture graphique n'étant pas un outil « 100% fiable », j'ai choisi de rajouter une question de résolution algébrique.

D'autre part, les valeurs numériques proposées ne permettaient pas de lecture graphique intéressante, je les ai donc changées.

IV Enoncés et références des exercices.

IV.1 Exercice n°1 (n°60 p 88, Bordas 3ème 1999).

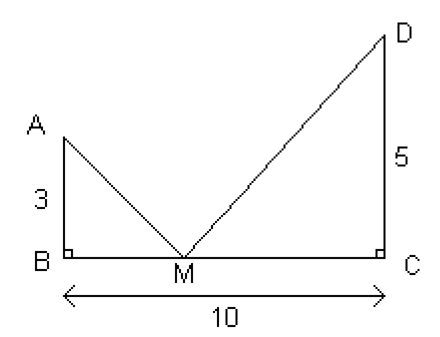
Des spectateurs assistent à un motocross. Ils ont garé leur véhicule, auto ou moto, sur un parking. Il y a en tout, 65 véhicules et on dénombre 180 roues.

Combien y-a-t-il de motos ?

IV.2 Exercice n°2 (n°50 p 95, Transmath 4ème 1998).

L'unité de longueur est le cm.

Le point M se déplace sur le segment [BC]. On veut savoir où doit se placer le point M pour que les triangles ABM et CDM aient la même aire.



Notons x la longueur BM et a l'aire du triangle ABM en cm², b l'aire du triangle CDM en cm².

1. *Une aide graphique.*
    a) Exprime a et b en fonction de x.
    b) Recopie et complète ce tableau.

x	4	5	6	7	8
a					
b					

c) Trace un repère (unité graphique : le carreau). Place, en rouge, les cinq points de coordonnées(x ;a) et en vert, les cinq points de coordonnées (x ;b) correspondant au tableau.

d) Utilise ce graphique pour « deviner » la valeur de x pour laquelle a = b.

2. Avec une équation.
    a) Traduis par une équation le fait que les triangles ABM et CDM ont la même aire.
    b) Résous cette équation et conclu.

IV.3 Exercice n°3 (n°53 p 88, Bordas 3ème 1999).

L'entreprise Loca-Outil propose la location d'un certain type de matériel aux conditions suivantes : 80€ pour le premier jour d'utilisation plus 60€ par jour pour les jours suivants.

L'entreprise Outil-Plus propose pour le même matériel un forfait de 60€ plus 50€ par journée d'utilisation.

A partir de combien de jours de location devient-il plus intéressent de s'adresser à Outil-Plus ?

IV.4 Exercice n°4 (Annabrevet 2002).

Une entreprise fabrique des coquetiers en bois qu'elle vend ensuite à des artistes-peintres. Elle leur propose, à deux tarifs, au choix :

- Tarif n°1 : 3,5€ le coquetier ;
- Tarif n°2 : un forfait de 63€ et 2€ le coquetier.

1. Calculer le prix de 30 coquetiers et celui de 60 coquetiers au tarif n°1 puis au tarif n°2.
2. On note x le nombre de coquetiers commandés.

   a) Exprimer, en fonction de x, les prix $P_1(x)$ au tarif n°1 et $P_2(x)$ au tarif n°2 de x coquetiers.

   b) Construire, dans un repère orthogonal, les droites Δ_1 et Δ_2 qui représentent les fonctions P_1 et P_2. On prendra comme unités :

   - Sur l'axe des abscisses : 1cm pour 10 coquetiers commandés ;
   - Sur l'axe des ordonnées : 1cm pour 15€.

3. Par simple lecture graphique, répondre aux trois questions suivantes :

   a) Quel est le plus grand nombre de coquetiers qu'un peintre peut acheter avec 180€ ?

   b) Pour quel nombre de coquetiers les prix P_1 et P_2 sont-ils les mêmes ?

   c) A quelle condition le tarif n°2 est-il plus avantageux ?

4. Retrouver les résultats de la question 3. par le calcul.

V Correction des exercices.

V.1 Exercice n°1.

Soit x le nombre de motos présentes sur le parking. Le nombre de voitures s'écrit alors 65 – x.

Une moto possède deux roues et une voiture quatre. Il y a donc 2x + 4(65-x) roues. Par suite, il faut résoudre l'équation 2x+4(65-x) = 180.

2x + 4(65-x) = 180
2x + 260 – 4x = 180
-2x + 260 = 180
2x = 260 – 180
2x = 80
x = $\frac{80}{2}$
x= 40

Il y a donc 40 motos sur le parking.

V.2 Exercice n°2.

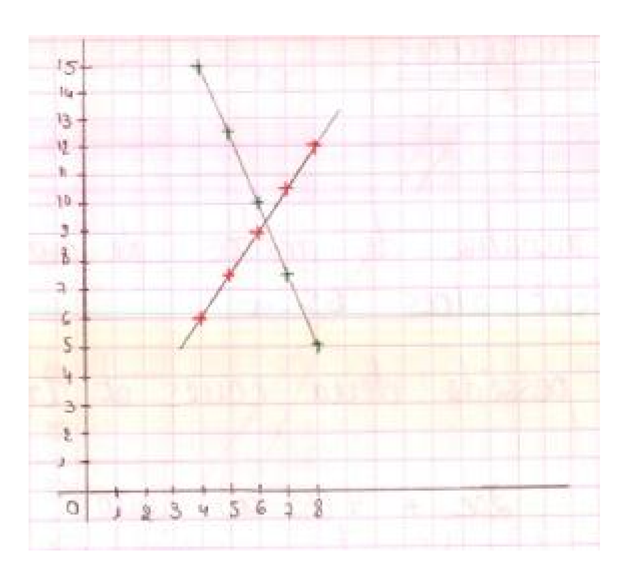
1. a) a = $\frac{AB \times BM}{2} = \frac{3x}{2}$

b = $\frac{CM \times CD}{2} = \frac{5(10-x)}{2} = \frac{50-5x}{2}$.

b)

x	4	5	6	7	8
a	6	$\frac{15}{2}$	9	$\frac{21}{2}$	12
b	15	$\frac{25}{2}$	10	$\frac{15}{2}$	5

c)



d) **x = 6,3**

2. a) ABM et CDM ont même aire lorsque a = b c'est à dire lorsque $\frac{3x}{2} = \frac{50-5x}{2}$.

b) $\frac{3x}{2} = \frac{50-5x}{2}$

6x = 100 – 10x

16x = 100

$x = \frac{100}{16} = \frac{25}{4}$

D'où x = 6,25.

Les triangles ABM et CDM ont même aire pour x = 6,25.

V.3 Exercice n°3.

Soit x le nombre de jour d'utilisation du matériel.

Prix de la location pour x jours :

- Chez Loca-Outil : 80 + 60(x-1) ;
- Chez Outil-Plus : 60 + 50x.

Il faut donc résoudre l'inéquation :

$60 + 50x < 80 + 60(x-1)$

$60 + 50x < 80 + 60x - 60$

$60 + 50x < 20 + 60x$

$40 < 10x$

$4 < x$

Il est plus intéressant de s'adresser à Outil-Plus à partir de 5 jours de location.

V.4 Exercice n°4.

1. $30 \times 3,5 = 105$.

Le prix de 30 coquetiers au tarif n°1 est 105€.

$60 \times 3,5 = 210$

Le prix de 60 coquetiers au tarif n°1 est 210€.

$63 + 30 \times 2 = 123$

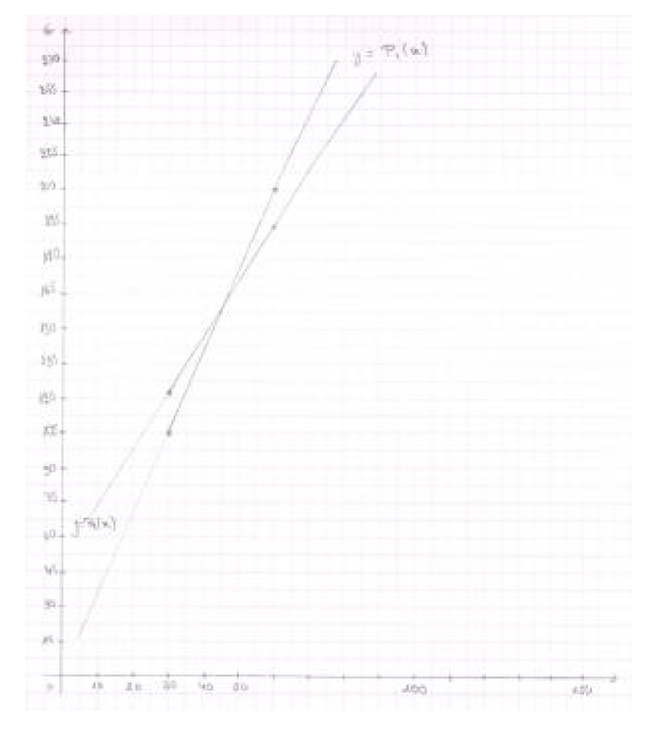
Le prix de 30 coquetiers au tarif n°2 est 123€.

$50 + 60 \times 2 = 193$

Le prix de 60 coquetiers au tarif n°2 est 193€.

2. a) **$P_1(x) = 3,5x$** **$P_2(x) = 63+2x$**

   b)



3. Par lecture graphique :

a) Le plus grand nombre de coquetiers qu'un peintre peut acheter avec 180€ est la plus grande des abscisses des points de Δ_1 et Δ_2 ayant pour ordonnée 180.

Le plus grand nombre de coquetiers qu'un peintre peut acheter avec 180 € est 53 avec le tarif n°2.

b) Le nombre de coquetier pour lequel les prix P_1 et P_2 sont les mêmes est l'abscisse du point d'intersection des droites Δ_1 et Δ_2.

Pour 46 coquetiers, les prix P_1 et P_2 sont les mêmes.

c) Il faut déterminer pour quelle quantité de coquetiers achetée le tarif n°2 est inférieur au tarif n°1, ce qui correspond à chercher les abscisses des points appartenant à une portion de Δ_2 située sous la droite Δ_1

Le Tarif n°2 est plus avantageux si on achète au moins 47 coquetiers.

4. a) Il s'agit de résoudre les deux équations $P_1(x) = 180$ et $P_2(x) = 180$ et de garder la plus grande des deux solutions.

$P_1(x) = 180$
$3{,}5x = 180$
$x = \frac{180}{3{,}5}$
$x \approx 51{,}42$

Donc le plus grand nombre de coquetiers qu'on peut acheter avec 180 € au tarif n°1 est 51.

$P_2(x) = 180$
$63 + 2x = 180$
$2x = 180 – 63$
$2x = 117$
$x = \frac{117}{2}$
$x = 58{,}5$

Donc le plus grand nombre de coquetiers qu'on peut acheter avec 180€ au tarif n°2 est 58.

Donc **le plus grand nombre de coquetiers qu'on peut acheter avec 180€ est 58.**

b) Il s'agit de résoudre l'équation $P_1(x) = P_2(x)$.

$P_1(x) = P_2(x)$
$3{,}5x = 63 + 2x$
$3{,}5x – 2x = 63$
$1{,}5x = 63$

$x = \frac{63}{1,5}$

x = 42

Donc, **pour 42 coquetiers, les prix P_1 et P_2 sont les mêmes.**

c) Il s'agit de résoudre l'inéquation $P_2(x) < P_1(x)$.

$P_2(x) < P_1(x)$

$63 + 2x < 3,5x$

$63 < 1,5x$

$42 < x$

Il faut acheter au moins 47 coquetiers pour que le tarif n°2 soit plus avantageux que le tarif n°1.

VI Commentaires – Compléments.

a) Le dossier distribué par le jury pour accompagner ce sujet stipule qu'un des exercices doit faire appel à la calculatrice pour sa résolution. Mis à part le calcul approché de $\frac{180}{3,5}$ (ce qui n'est pas vraiment pédagogique et intéressant), je n'ai pas trouvé d'applications au collège. Alors, si vous avez une idée…

b) Il me semble intéressant de bien souligner que la résolution graphique des équations et inéquations du premier degré à une inconnue dépend de la précision du tracé, ce que montre bien la correction que je propose de l'exercice 4 puisque les valeurs trouvées graphiquement sont différentes des valeurs trouvées algébriquement.

En ce point, on remarquera que le mot « deviner » dans l'exercice n°2 est très bien choisi puisqu'il fait bien comprendre à l'élève que la lecture graphique n'est pas suffisante.